PART5 三角関数の性質

要点 ① $\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$，$\theta+2n\pi$，$-\theta$ の三角関数

角 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$ の動径を考えることにより，次の公式が成り立つ。

$\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$ の三角関数

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$　　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$　　$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$　　$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

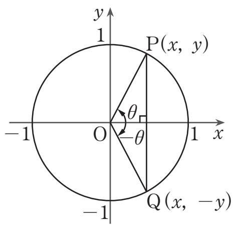
n が整数のとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径と一致する。よって，次の公式が成り立つ。

$\theta+2n\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$　（n は整数）

例　$\sin\dfrac{7}{3}\pi=\sin\left(\quad+\quad\right)=\qquad=$

角 θ，角 $-\theta$ の動径と単位円の交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q は x 軸に関して対称である。よって，P の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q の座標は　　　　　となる。したがって，次の公式が成り立つ。



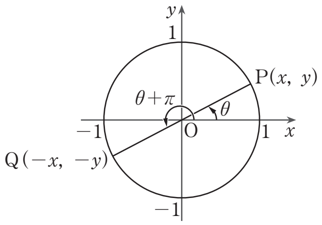
$-\theta$ の三角関数

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

例　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\qquad=$

要点 ② $\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

角 θ，角 $\theta+\pi$ の動径と単位円の交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q は原点に関して対称である。よって，P の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q の座標は　　　　　となる。
したがって，次の公式が成り立つ。

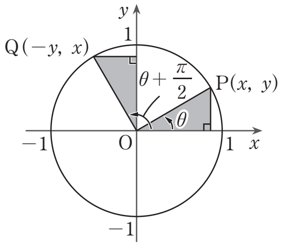


$\theta+\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$　　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$　　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

例 $\sin\dfrac{5}{4}\pi=\sin\left(\quad+\quad\right)=\qquad=$

角 θ，角 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の動径と単位円の交点をそれぞれ P，Q とすると，動径 OP を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものが動径 OQ である。
よって，P の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q の座標は　　　　　となる。したがって，次の公式が成り立つ。



$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$　　$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$　　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

角 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\pi-\theta$，$\theta+2n\pi$，$-\theta$，$\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の公式を用いると，すべての角に対する三角関数の値を，0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで（0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下）の角に対する三角関数の値で表すことができる。

5　次の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{9}{4}\pi$，$\cos\frac{9}{4}\pi$　(2)　$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$，$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$　(3)　$\sin\frac{7}{6}\pi$，$\cos\frac{7}{6}\pi$

Point Pickup

$\theta+2n\pi$，$-\theta$，$\theta+\pi$ の三角関数

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

（n は整数）

第 8 講　PART5 確認問題

1 $\sin(\theta+2n\pi)=$ [ア], $\cos(\theta+2n\pi)=$ [イ] を利用すると,

$\sin\frac{17}{6}\pi=$ [ウ], $\cos\frac{17}{6}\pi=$ [エ] である。

[[ア] [イ] の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

[[ウ] [エ] の選択肢]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2 $\sin(-\theta)=$ [オ], $\cos(-\theta)=$ [カ] を利用すると,

$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=$ [キ], $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=$ [ク] である。

[[オ] [カ] の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

[[キ] [ク] の選択肢]

① 1　② -1　③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\sin(\theta+\pi)=$ [ケ]，$\cos(\theta+\pi)=$ [コ] を利用すると，

$\sin\frac{4}{3}\pi=$ [サ]，$\cos\frac{4}{3}\pi=$ [シ] である。

[[ケ] [コ] の選択肢]

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $-\cos\theta$

[[サ] [シ] の選択肢]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\sqrt{3}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

[MEMO]

PART5 三角関数の性質

5 次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{9}{4}\pi$, $\cos\frac{9}{4}\pi$　(2) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$, $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$　(3) $\sin\frac{7}{6}\pi$, $\cos\frac{7}{6}\pi$

[解答]

(1) $\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\frac{9}{4}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(3) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

第 8 講　PART5 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：③，ウ：②，エ：⑥

[解説]

$\sin(\theta+2n\pi)=\mathbf{sin\,\theta}$，$\cos(\theta+2n\pi)=\mathbf{cos\,\theta}$ であり　[A]

$$\sin\frac{17}{6}\pi=\sin\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\frac{17}{6}\pi=\cos\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi\right)=\cos\frac{5}{6}\pi=\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

> [A]　$\theta+2n\pi$ の三角関数
> $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$
> $\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$
> $\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$　（n は整数）

2　**[正解]** オ：②，カ：③，キ：④，ク：④

[解説]

$\sin(-\theta)=\mathbf{-sin\,\theta}$，$\cos(-\theta)=\mathbf{cos\,\theta}$ であり　[B]

$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{4}\pi=\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi=\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

> [B]　$-\theta$ の三角関数
> $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
> $\cos(-\theta)=\cos\theta$
> $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

3 [正解] ケ：②，コ：④，サ：⑥，シ：③

[解説]

$\sin(\theta+\pi)=\boldsymbol{-\sin\theta}$，$\cos(\theta+\pi)=\boldsymbol{-\cos\theta}$ であり

[C]

$$\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

[C]　$\theta+\pi$ の三角関数
$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$
$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$
$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$